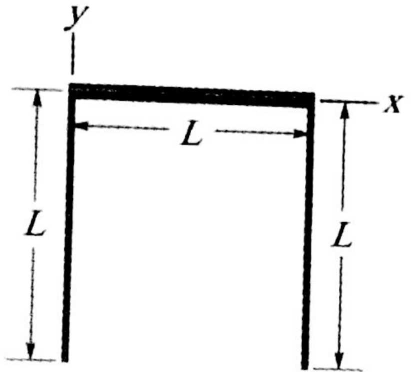
●●۴- در شکل ۹-۳۷ سه میلهٔ یکنواخت باریک هر یک به طول $L = ۲۲\,\text{cm}$ تشکیل یک U وارونه را داده‌اند. میله‌های قائم هر یک دارای جرم ۱۴g هستند و میلهٔ افقی ۴۲g جرم دارد. (الف) مختصهٔ x و (ب) مختصهٔ y مرکز جرم سامانه چقدر است؟



شکل ۹-۳۷ مسئلهٔ ۴

حل: با توجه به صورت مسئله جرم میلهٔ افقی سه برابر جرم میله عمودی است و با درنظر گرفتن دستگاه مختصات برای هر میله می‌توان نوشت:

میلهٔ سمت چپ

$$m_۱ = M$$
$$x_۱ = ۰$$
$$y_۱ = -L/۲$$

میلهٔ بالایی

$$m_۲ = ۳M$$
$$x_۲ = L/۲$$
$$y_۲ = ۰$$

میله سمت راست

$$m_۳ = M$$
$$x_۳ = L$$
$$y_۳ = -L/۲$$

(الف) مختصهٔ x مرکز جرم دستگاه طبق تعریف برابر است با

$$x_{\text{com}} = \frac{m_۱x_۱ + m_۲x_۲ + m_۳x_۳}{m_۱ + m_۲ + m_۳} \Rightarrow x_{\text{com}} = ۰/۵L = ۱۱\text{cm}$$

Scanned by CamScanner

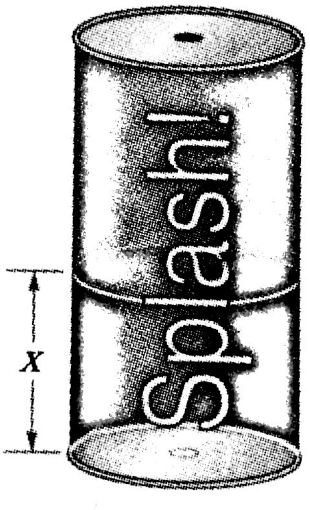
(ب) مختصهٔ y مرکز جرم دستگاه برابر است با

$$y_{\text{com}} = \frac{m_۱ y_۱ + m_۲ y_۲ + m_۳ y_۳}{m_۱ + m_۲ + m_۳} \Rightarrow y_{\text{com}} = -۰/۲L = -۴/۴\,\text{cm}$$

توجه: چنانچه دستگاه مختصات دیگری را در نظر می‌گرفتیم اعداد متفاوتی به‌دست می‌آمد ولی توجه داریم که محل مرکز جرم دستگاه با انتخاب دستگاه مختصات تغییر نمی‌کند.

Scanned by CamScanner

۸●●●- GO قوطی فلزی نوشابه با ترکیب یکنواخت دارای جرم ۰/۱۴۰ kg و ارتفاع ۱۲/۰ cm است، (شکل ۹-۴۱). قوطی با ۱/۳۱kg نوشابه پر شده است. سپس در بالا و پایین سوراخ‌هایی ایجاد می‌کنیم (جرم کم شدهٔ فلز قابل چشم‌پوشی است) تا نوشابه خارج شود. ارتفاع h مرکز جرم قوطی و نوشابهٔ آن (الف) در آغاز و (ب) وقتی همهٔ نوشابه خارج شده باشد چقدر است؟ (پ) در حین خارج شدن نوشابه چه تغییری برای h رخ می‌دهد؟ (ت) اگر x ارتفاع نوشابهٔ باقی مانده در هر لحظهٔ معین باشد، x را هنگامی که مرکز جرم به پایین‌ترین نقطهٔ خود می‌رسد، به‌دست آورید.



شکل ۹-۴۱ مسئلهٔ ۸

حل: (الف) در ابتدا که قوطی نوشابه پر است و جنس قوطی و نوشابه یکنواخت است لذا مرکز جرم مجموعه در $h = H/۲$

Scanned by CamScanner

است. این نتیجه را می‌توان با در نظر گرفتن جرم قوطی و مرکز جرم نوشابه و به کار بردن تعریف مرکز جرم به‌دست آورد.

$$h=\frac{M(H/۲)+m(H/۲)}{M+m}=\frac{H}{۲}$$

(ب) در این حالت فقط قوطی را داریم و مرکز جرم آن روی محور استوانه و در ارتفاع $H/۲$ از قاعده قرار دارد.

(پ) در حین خارج شدن نوشابه ارتفاع مرکز جرم کاهش یافته و به یک مقدار کمینه می‌رسد و سپس افزایش یافته و وقتی نوشابه کاملاً تخلیه می‌شود به ارتفاع $H/۲$ می‌رسد.

(ت) وقتی سطح نوشابه به اندازهٔ x بالاتر از قاعده قوطی است، جرم نوشابهٔ باقی ماندهٔ m' در قوطی با استفاده از یک تناسب ساده برابر $m'=\frac{m}{H}x$ است. مرکز جرم در این لحظه برابر است با

$$h=\frac{M(H/۲)+m'(x/۲)}{M+m'}=\frac{M(H/۲)+(mx/H)(x/۲)}{M+mx/H}$$

$$h=\frac{MH^۲+mx^۲}{۲(MH+mx)} \qquad (۱)$$

برای به‌دست آوردن x مربوط به کمینه مقدار مرکز جرم قوطی و نوشابه، از h نسبت به x مشتق گرفته و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم

$$\frac{dh}{dx}=\frac{۲MmHx+m^۲x^۲-MmH^۲}{۲(MH+mx)}=۰$$

لذا داریم $۲MmHx+m^۲x^۲-MmH^۲=۰$ و پاسخ این معادله برابر است با

$$x=\frac{-MH\pm\sqrt{M^۲H^۲+MmH^۲}}{m}$$

با توجه به اینکه x باید مثبت باشد، جواب مثبت را انتخاب می‌کنیم و پس از ساده‌سازی داریم

$$x=\frac{MH}{m}\left[-۱+\sqrt{۱+\frac{m}{M}}\right]$$

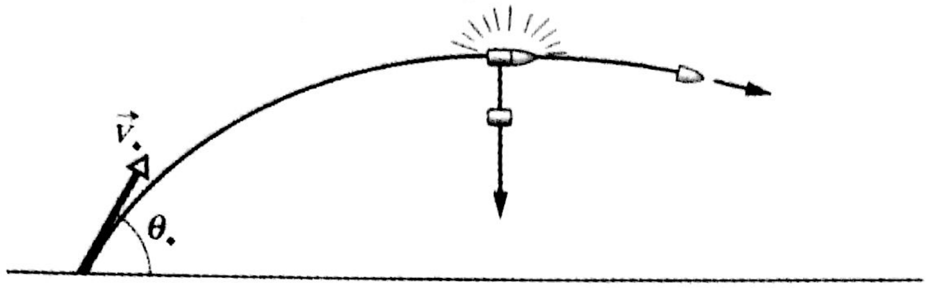
با قرار دادن داده‌های مسئله در این رابطهٔ x به‌دست می‌آید و با جایگزین کردن آن در رابطهٔ (۱)، h به‌دست می‌آید.

Scanned by CamScanner

••۱۳۰۰- SSM گلوله‌ای با سرعت اولیهٔ $\vec{v}_0$ برابر $20\,m/s$ با زاویهٔ $\theta_0 = 60^\circ$ نسبت به افق شلیک می‌شود. در بالای مسیر گلوله منفجر و به دو تکه با جرم‌های مساوی تقسیم می‌شود

Scanned by CamScanner

(شکل ۹-۴۲). یک تکه که تندی آن درست پس از انفجار صفر است به‌طور قائم سقوط می‌کند. تکهٔ دیگر در چه فاصله‌ای از توپ به زمین فرود می‌آید، با فرض اینکه زمین با تفنگ هم سطح است و از نیروی کششی هوا می‌توان چشم‌پوشی کرد.



شکل ۹-۴۲ مسئلهٔ ۱۳

حل: نیروی انفجار یک نیروی داخلی است و روی مسیر مرکز جرم اثری ندارد. لذا مرکز جرم به حرکت پرتابه‌ای خود ادامه داده و مکان مرکز جرم در موقع برخورد با زمین عملاً همان برد پرتابه است. لذا می‌توان نوشت

$$x_{\text{com}} = R = \frac{v_\circ^{۲} \sin ۲\theta_\circ}{g} = \frac{(۲۰/۰\,\text{m/s})^{۲} \sin(۱۲۰^\circ)}{۹/۸\text{m/s}^{۲}} = ۳۵/۳۴\text{m}$$

چون انفجار در نقطهٔ اوج حرکت رخ داده و قطعهٔ ۱ به صورت قائم سقوط می‌کند پس مکان برخورد به زمین آن برابر است با $x_۱ = R/۲$ و اگر محل برخورد قطعهٔ ۲ را $x_۲$ بنامیم می‌توان آن را از رابطه تعریف مرکز جرم به‌دست آورد.

$$x_{\text{com}} = \frac{m_۱ x_۱ + m_۲ x_۲}{m_۱ + m_۲} \Rightarrow R = \frac{m_۱(R/۲) + m_۱ x_۲}{m_۱ + m_۱}$$

چون $m_۲ = m_۱$ است لذا داریم

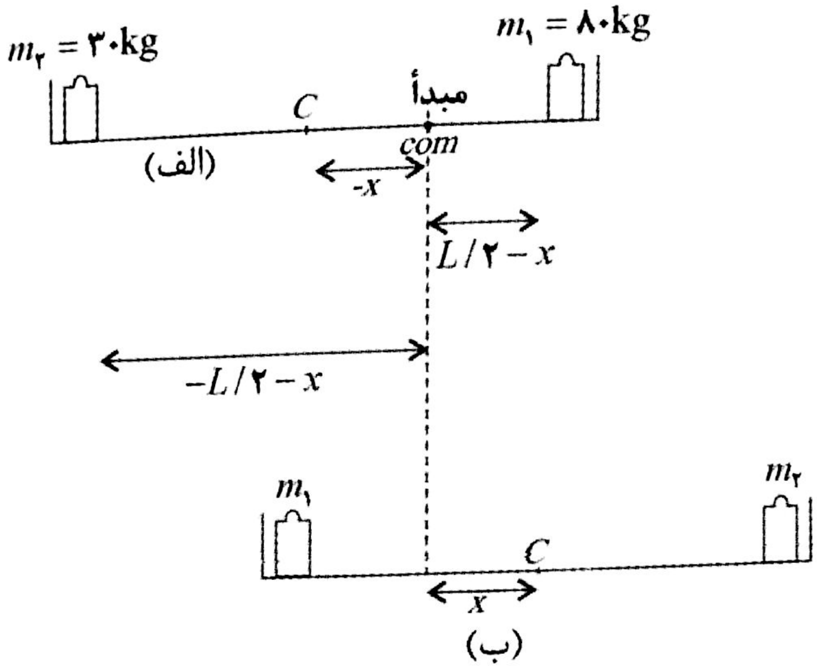
$$\Rightarrow x_۲ = \frac{۳}{۲} R = \frac{۳}{۲}(۳۵/۳۴\,\text{m}) = ۵۳\,\text{m}$$

Scanned by CamScanner

۱۶●●●- شخصی به جرم ۸۰kg با شخص دیگری که سبک‌تر است با یک قایق پارویی به جرم ۳۰kg در دریاچه‌ای به قایقرانی مشغول‌اند. وقتی قایق در آب آرام ساکن است، آنها صندلی‌های خود را که ۳/۰m فاصله دارند و نسبت به مرکز قایق تقارن دارند عوض می‌کنند. شخص سنگین‌تر متوجه می‌شود که در حین عوض کردن جا قایق نسبت به کندهٔ درختی که داخل آب است به اندازهٔ ۴۰cm به‌طور افقی حرکت می‌کند و از آنجا جرم شخص دیگر را که به او گفته نشده است محاسبه می‌کند، این جرم چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل: چون نیروی افقی صفر است لذا شتاب نیز صفر و سرعت مرکز جرم ثابت است و چون قایق در آغاز ساکن است مرکز جرم نیز باید ساکن بماند. مرکز جرم به شخص $m_1 = 80\,\text{kg}$ نزدیک‌تر است و برای سادگی مبدأ را در مکان مرکز جرم انتخاب می‌کنیم یعنی $x_{\text{com}} = 0$ و با توجه به شکل الف و جرم قایق برابر با m_3 ، داریم



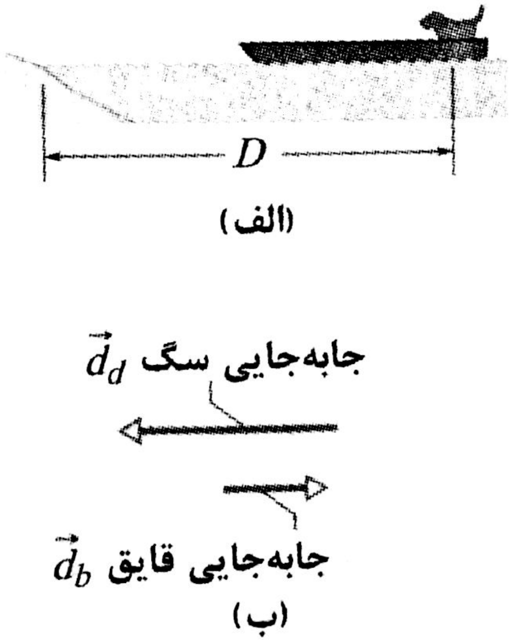
$$m_1\left(\frac{L}{2} - x\right) + m_2\left(-\frac{L}{2} - x\right) + m_3(-x) = 0$$

پس از اینکه این دو نفر جای خود را عوض می‌کنند مرکز جرم ضمن ساکن بودن باید به m_1 نزدیک‌تر باشد لذا قایق به سمت راست حرکت می‌کند و این بار مرکز قایق به مقدار x سمت راست مبدأ قرار می‌گیرد (شکل ب) یعنی جابه‌جایی مرکز قایق برابر $2x$ است لذا $x = \frac{40}{2} = 20\,\text{cm}$ و با قرار دادن آن و داده‌های مسئله در رابطهٔ بالا و حل آن برای m_2 ، داریم

$$m_2 = \frac{m_1(\frac{L}{2} - x) - m_3 x}{\frac{L}{2} + x} = \frac{(80)(\frac{30}{2} - 0/2) - (30)(0/2)}{\frac{30}{2} + 0/2} = 58\,\text{kg}$$

Scanned by CamScanner

●●●۱۷- در شکل ۹-۴۵ الف، سگی به جرم $۴/۵\text{kg}$ روی قایق ۱۸kg ایستاده است و در فاصلهٔ $D = ۶/۱\text{m}$ از ساحل قرار دارد. سگ $۲/۴\text{m}$ روی قایق به سمت ساحل راه می‌رود و سپس می‌ایستد. فرض کنید بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. سگ در این لحظه در چه فاصله‌ای از ساحل قرار دارد؟ (راهنمایی: به شکل ۹-۴۵ ب نگاه کنید. سگ به سمت چپ حرکت می‌کند؛ قایق به سمت راست می‌رود؛ آیا مرکز جرم سگ + قایق حرکت خواهد کرد؟)

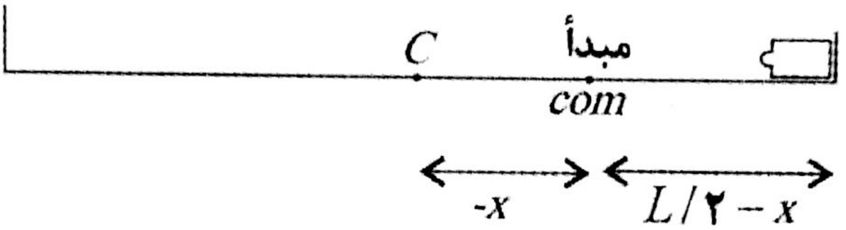


شکل ۹-۴۵ مسئلهٔ ۱۷

Scanned by CamScanner

حل: جرم سگ را $m_۱$ و جرم قایق را $m_۲$ می‌نامیم. مرکز جرم دستگاه به سگ نزدیک‌تر است. برای سادگی مبدأ را در مکان مرکز جرم که ساکن باقی می‌ماند. (چون نیروی افقی برابر صفر است و قایق در ابتدا نیز ساکن است) انتخاب می‌کنیم، در نتیجه $x_{\text{com}} = ۰$ و با توجه به شکل می‌توان نوشت

$$m_۱\left(\frac{L}{۲} - x\right) + m_۲(-x) = ۰$$



با قرار دادن داده‌های مسئله و حل معادله برای x، داریم

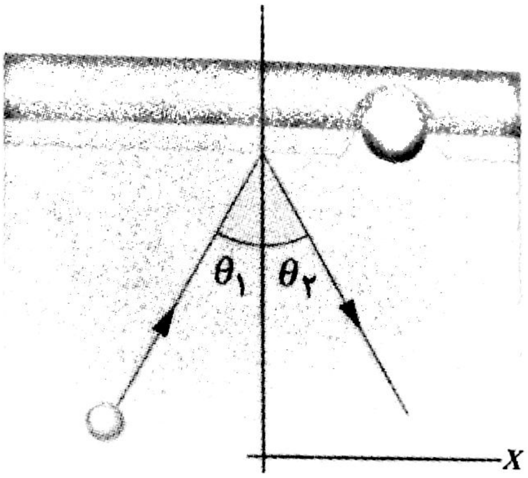
$$(۴/۵)\left(\frac{۲/۴}{۲} - x\right) + ۱۸(-x) = ۰ \Rightarrow x = ۰/۲۴\,\text{m}$$

پس از جابه‌جایی سگ $(d_d = ۲/۴\text{m})$ مرکز جرم هنوز هم باید نزدیک به سگ باشد لذا قایق باید به سمت راست حرکت کند و مرکز قایق به اندازه $d_b = ۲x = ۰/۴۸\,\text{m}$ به سمت راست جابه‌جا می‌شود در نتیجه می‌توان مکان جدید سگ را از ساحل از رابطهٔ زیر به‌دست آورد.

$$x_d = D + d_b - d_d = ۶/۱\text{m} - ۰/۴۸\text{m} - ۲/۴\text{m}$$
$$= ۴/۲\text{m}$$

Scanned by CamScanner

۲۲••- شکل ۹-۴۷ دید از بالای مسیر طی شده به وسیلهٔ یک گوی بیلیارد به جرم $0/165\,kg$ را نشان می‌دهد که پس از برخورد به لبهٔ میز به عقب می‌جهد. تندی اولیهٔ گوی $2/00\,m/s$ و زاویهٔ θ_1 برابر $30°$ است. به عقب جهیدن مؤلفهٔ y را برعکس می‌کند اما مؤلفهٔ x تغییر نمی‌کند. (الف) زاویهٔ θ_2، (ب) تغییر در اندازه حرکت خطی گوی برحسب نمادگذاری بردار یکه چگونه است؟ (این واقعیت که گوی می‌غلتد در مسئله منظور نشده است.)



شکل ۹-۴۷ مسئلهٔ ۲۲

حل: (الف) اگر توپ و تیر را یک سیستم در نظر بگیریم، با توجه به پایستگی اندازه حرکت خطی داریم $\vec{p}_f = \vec{p}_i$ و با توجه به شکل مسئله برای توپ می‌توان نوشت $p_{xf} = p_{xi}$ و $p_{yf} = -p_{yi}$. از طرف دیگر چون مؤلفهٔ x سرعت یکسان باقی می‌ماند لذا می‌توان نوشت

$$p_{xf} = p_{xi} \Rightarrow mv_i \sin\theta_2 = mv_i \sin\theta_1 \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 = 30/0°$$

(ب)

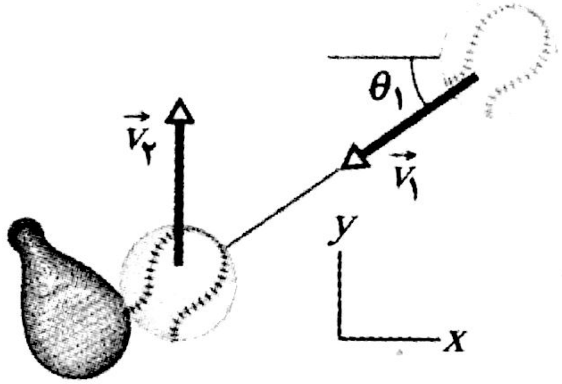
$$\Delta \vec{p} = (p_{xf} - p_{xi})\hat{i} + (-p_{yf} - p_{yi})\hat{j}$$

$$= -2P_{yi}\hat{j} = (-2mv_i \cos\theta_1)\hat{j}$$

$$= (-0/572\,kg \cdot m/s)\hat{j}$$

Scanned by CamScanner

●●۳۳- شکل ۹-۵۱ یک توپ بیسبال به جرم $0/300\,kg$ را درست پیش و پس از برخورد با چوب بیسبال نشان می‌دهد. درست پیش از برخورد توپ دارای سرعت $\vec{v}_1$ به بزرگی $12/0\,m/s$ و زاویهٔ $\theta_1 = 30°$ است. درست پس از برخورد، توپ مستقیماً به سمت بالا با سرعت $\vec{v}_2$ به بزرگی $10/0\,m/s$ حرکت می‌کند. مدت برخورد $2/00\,ms$ است. (الف) بزرگی و (ب) جهت (نسبت به جهت مثبت محور x) ضربهٔ وارد به توپ از طرف چوب بیسبال چقدر است؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت نیروی متوسط وارد به توپ از طرف چوب بیسبال چیست؟



شکل ۹-۵۱ مسئلهٔ ۳۳

حل:

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = mv_f\,\hat{j} - [mv_i\cos\theta(-\hat{i}) + mv_i\sin\theta(-\hat{i})]$$

$$= (2/95\,\hat{i} + 5/1\,\hat{j})\,N\cdot s$$

(الف) $$J = \sqrt{(2/95)^2 + (5/1)^2} = 5/86\,N\cdot s$$

(ب) $$\theta = \tan^{-1}\frac{J_y}{J_x} = \tan^{-1}\frac{5/1}{2/95} = 59/8°$$

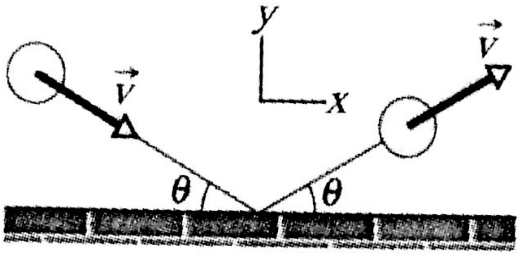
(پ) $$F_{ave} = \frac{J}{\Delta t} = \frac{5/86}{2/00\times10^{-3}} \approx 2/93\times10^{3}\,N$$

(ت) جهت نیرو و ضربه یکسان است، $\theta = 59/8°$.

Scanned by CamScanner

●●۳۸- در دید از بالای شکل ۹-۵۴ گلوله‌ای به جرم $300\,g$ با تندی v برابر $6/0\,m/s$ با زاویهٔ θ برابر 30° به دیواری برخورد می‌کند و سپس با همان تندی و همان زاویه برمی‌گردد. گلوله به مدت $10\,ms$ با دیوار در تماس است. به شکل نمادهای بردار-یکه (الف) ضربهٔ وارد به گلوله توسط دیوار و (ب) میانگین نیروی وارد به دیوار توسط گلوله چقدر است؟

Scanned by CamScanner



شکل ۹-۵۴ مسئلهٔ ۳۸

حل: (الف) با رابطهٔ $\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i$ می‌توان ضربه را محاسبه کرد

$$\vec{P}_i = m\vec{v}_i = m(v\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} - v\sin\theta\,\hat{\mathrm{j}}) = mv(\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} - \sin\theta\,\hat{\mathrm{j}})$$

$$\vec{P}_f = m\vec{v}_f = m(v\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} + v\sin\theta\,\hat{\mathrm{j}}) = mv(\cos\theta\,\hat{\mathrm{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathrm{j}})$$

لذا داریم

$$\vec{J} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = ۲mv\sin\theta\,\hat{\mathrm{j}} = ۲(۰/۳\,\mathrm{kg})(۶\,\mathrm{m/s})(\sin ۳۰°)\hat{\mathrm{j}}$$

$$\vec{J} = (۱/۸\,\mathrm{N\cdot s})\hat{\mathrm{j}}$$

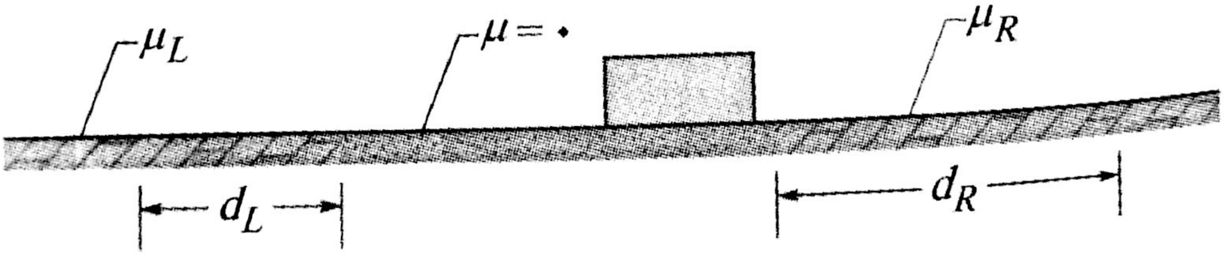
(ب)

$$\vec{F}_{\mathrm{ave}} = \frac{\vec{J}}{\Delta t} = \frac{(۱/۸\,\mathrm{N\cdot s})\hat{\mathrm{j}}}{۱۰\times۱۰^{-۳}\,\mathrm{s}} = (۱۸۰\,\mathrm{N})\,\hat{\mathrm{j}}$$

Scanned by CamScanner

$\Delta K = (\Delta v_x)^2$

۴۴●● - در شکل ۹-۵۷ قطعهٔ ساکنی منفجر و به دو قطعهٔ L و R تقسیم می‌شود که روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزند و سپس به ناحیه‌های اصطکاک‌دار می‌رسند و در آنجا متوقف می‌شوند. قطعهٔ L، با جرم ۲/۰ kg با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_L =$ ۰/۴۰ مواجه می‌شود و قبل از توقف مسافت $d_L =$ ۰/۱۵m را طی می‌کند. قطعهٔ R با ضریب اصطکاک جنبشی $\mu_R =$ ۰/۵۰ مواجه می‌شود و قبل از توقف مسافت $d_R =$ ۰/۲۵m را طی می‌کند. جرم قطعه چقدر بوده است؟



شکل ۹-۵۷ مسئلهٔ ۴۴

حل: با کمک پایستگی انرژی بر روی سطوح با اصطکاک سرعت اولیه هر قطعه را به‌دست می‌آوریم. در اینجا انرژی جنبشی به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود لذا

Scanned by CamScanner

$$\Delta E_L = \Delta U + \Delta K \Rightarrow \mu_L m_L g d_L = ۰ + \frac{۱}{۲} m_L v_L^{۲}$$

$$\Rightarrow v_L = \sqrt{۲\mu_L g d_L} = ۳/۴۶\,\text{m/s}$$

و به‌طور مشابه داریم

$$v_R = \sqrt{۲\mu_R g d_R} = ۵/۰\,\text{m/s}$$

حال در ناحیهٔ بدون اصطکاک هیچ نیروی خارجی به‌دستگاه وارد نمی‌شود و انفجار نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است

$$۰ = m_R v_R - m_L v_L \Rightarrow m_R = \frac{v_L}{v_R} m_L = \frac{۳/۴۶}{۵}(۲/۰)$$

$$= ۱/۳۹\,\text{kg}$$

در نتیجه جرم قطعه برابر است با

$$m = m_R + m_L = ۱/۳۹ + ۲/۰ \approx ۳/۴\,\text{kg}$$

Scanned by CamScanner

۴۷۰۰●●- ظرف ساکنی که در مبدأء دستگاه مختصات xy واقع است، منفجر و به سه قطعه تقسیم می‌شود. درست پس از انفجار، یک قطعه، با جرم m ، با سرعت $(-30\,\text{m/s})\hat{i}$ حرکت می‌کند و قطعهٔ دوم، آن هم با جرم m ، با سرعت $(-30\,\text{m/s})\hat{j}$ حرکت می‌کند. سومین قطعه دارای جرم 3m است. درست پس از انفجار مطلوب است (الف) بزرگی و (ب) جهت سرعت قطعهٔ سوم.

حل: (الف) نیروی انفجار، نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است، بنابراین داریم

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3$$

با قرار دادن داده‌های مسئله خواهیم داشت

$$0 = m(-30\,\hat{i}) + m(-30\,\hat{j}) + 3m\vec{v}_3$$

$$\vec{v}_3 = (10\,\hat{i} + 10\,\hat{j})\,\text{m/s}$$

و بزرگی $\vec{v}_3$ برابر است با

$$v_3 = 10\sqrt{2}\,\text{m/s} \simeq 14\,\text{m/s}$$

(ب) با توجه به اینکه مؤلفه‌های x و y سرعت برابرند لذا جهت آن تحت زاویهٔ 45° نسبت به جهت مثبت محور x است.

Scanned by CamScanner

●●●۴۸- GO ذرهٔ A و ذرهٔ B توسط فنر فشرده‌ای که در بین آنهاست به هم نگهداشته شده‌اند. وقتی آنها رها شوند، فنر آنها را از هم جدا می‌کند و سپس آنها رها از فنر در دو جهت مخالف حرکت می‌کنند. جرم A دو برابر جرم B است و انرژی ذخیره شده در فنر ۶۰ J بوده است. فرض کنید جرم فنر ناچیز و تمام انرژی ذخیره شده در آن به ذره‌ها منتقل شده است. وقتی این انتقال کامل شد، انرژی جنبشی (الف) ذرهٔ A و (ب) ذرهٔ B چقدر است؟

Scanned by CamScanner

حل: (الف) چون هیچ نیروی خارجی بر دستگاه فنر- دو جرم وارد نمی‌شود و نیروی فنری یک نیروی داخلی است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است.

$$\circ = m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B \Rightarrow \circ = ۲m_B \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B$$

$$\Rightarrow \vec{v}_B = -۲\vec{v}_A$$

از طرف دیگر پایستگی انرژی مکانیکی برقرار است.

$$E = K_A + K_B \Rightarrow ۶\circ J = K_A + \frac{۱}{۲} m_B v_B^۲$$

$$= K_A + \frac{۱}{۲}(۲m_A)(-۲v_A)^۲$$

$$۶\circ J = K_A + ۲K_A = ۳K_A \Rightarrow K_A = ۲\circ \mathrm{J}$$

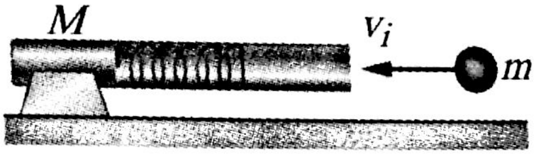
(ب) در نتیجه داریم

$$K_B = ۶\circ \mathrm{J} - K_A = ۶\circ \mathrm{J} - ۲\circ \mathrm{J} \Rightarrow K_B = ۴\circ \mathrm{J}$$

Scanned by CamScanner

و قسمت ...

۵۷●● در شکل ۹-۶۱ گلوله‌ای به جرم $m = ۶۰\,g$ با تندی $v_i = ۲۲ m/s$ به داخل لولهٔ یک تفنگ فنری به جرم $M = ۲۴۰\,g$، که در حال سکون روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، شلیک می‌شود. گلوله در لوله در نقطه‌ای که فنر به بیشینهٔ مقدار فشردگی‌اش می‌رسد، گیر می‌کند. فرض کنید که افزایش انرژی گرمایی بر اثر اصطکاک بین گلوله و لوله قابل چشم‌پوشی است. (الف) تندی تفنگ فنری پس از آنکه گلوله در لولهٔ تفنگ متوقف شد چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیهٔ گلوله در فنر ذخیره می‌شود؟



شکل ۹-۶۱ مسئلهٔ ۵۷

حل: (الف) با توجه به اینکه برخورد کاملاً ناکشسان است با استفاده از پایستگی اندازه حرکت خطی و با فرض اینکه v سرعت دستگاه گلوله- فنر پس از برخورد باشد می‌توان نوشت

$$m v_i = (m+M)v \Rightarrow v = \frac{m v_i}{m+M}$$

$$v = \frac{(۶۰\times ۱۰^{-۳}\ kg)(۲۲\ m/s)}{(۶۰\times ۱۰^{-۳}\ kg)+(۲۴۰\times ۱۰^{-۳}\ kg)} \Rightarrow v = ۴/۴\ m/s$$

(ب)

$$K_i = \frac{۱}{۲} m v_i^۲ = \frac{۱}{۲}(۶۰\times ۱۰^{-۳} kg)(۲۲\, m/s)^۲ = ۱۴/۵۲ J$$

$$K_f = \frac{۱}{۲}(m+M)v^۲ = \frac{۱}{۲}(۶۰\times ۱۰^{-۳}\ kg + ۲۴۰\times ۱۰^{-۳}\ kg)$$

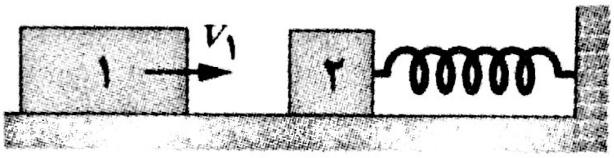
$$(۴/۴)^۲ = ۲/۹۰ J$$

Scanned by CamScanner

$$\text{کسر} = \frac{|K_f - K_i|}{K_i} = \frac{|۲/۹۰\text{J} - ۱۴/۵۲\text{J}|}{۱۴/۵۲} = ۰/۸$$

Scanned by CamScanner

۵۸●●●- در شکل ۹-۶۲، قطعهٔ ۲ (جرم ۱/۰ kg) ساکن است و روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد و به فنری با ثابت فنر ۲۰۰N/m که کشیده نشده و انتهای دیگرش ثابت است متصل است. انتهای دیگر فنر به دیوار وصل است. قطعهٔ ۱ (جرم ۲/۰ kg) که با تندی $v_۱ = ۴/۰\,m/s$ حرکت می‌کند با قطعهٔ ۲ برخورد می‌کند و دو قطعه به هم می‌چسبند. در لحظه‌ای که متوقف می‌شوند فنر چقدر فشرده می‌شود؟



شکل ۹-۶۲ مسئلهٔ ۵۸

حل: مسئله دارای دو مرحله است. مرحلهٔ یک برخورد کاملاً ناکشسان است و از پایستگی اندازه حرکت خطی سرعت دستگاه فنر- دو قطعه پس از برخورد به‌دست می‌آید

$$m_۱v_۱ + ۰ = (m_۱ + m_۲)v \Rightarrow v = \frac{m_۱v_۱}{m_۱ + m_۲}$$

$$v = \frac{(۲/۰kg)(۴۰m/s)}{۲/۰kg + ۱kg} = ۲/۷m/s$$

مرحله دوم شامل فشردگی فنر است که از پایستگی انرژی می‌توان مقدار فشردگی فنر را به‌دست آورد

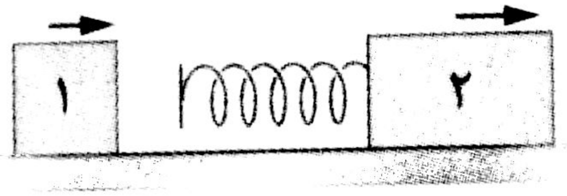
$$E_۱ = E_۲$$

$$۰ + \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v^۲ = \frac{۱}{۲}kx^۲ + ۰$$

$$(۳kg)(۲/۷)^۲ = (۲۰۰N/m)x^۲ \Rightarrow x = ۰/۳۳m$$

Scanned by CamScanner

●●●۵۹- ILW در شکل ۹-۶۳ قطعهٔ ۱ (جرم $2/0\,kg$) با تندی $10\,m/s$ به سمت راست و قطعهٔ ۲ (جرم $5/0\,kg$) با تندی $3/0\,m/s$ به سمت راست حرکت می‌کنند. سطح بدون اصطکاک است و فنری با ثابت فنر $1120\,N/m$ به قطعهٔ ۲ متصل است. وقتی قطعه‌ها برخورد کنند، در لحظه‌ای که دو قطعه سرعت یکسانی داشته باشند فشردگی فنر بیشینه است. بیشینهٔ فشردگی فنر چقدر است؟



شکل ۹-۶۳ مسئلهٔ ۵۹ و ۱۲۶

حل: با توجه به اینکه پس از برخورد وقتی دو قطعه سرعت یکسانی دارند فشردگی فنر بیشینه است می‌توان ابتدا از پایستگی اندازه حرکت خطی سرعت دو قطعه پس از برخورد را به‌دست آورده و سپس بیشینهٔ فشردگی از پایستگی انرژی به‌دست می‌آید.

Scanned by CamScanner

$$m_۱v_۱ + m_۱v_۱ = (m_۱ + m_۲)v$$

$$(۲/۰\,\text{kg})(۱۰\,\text{m/s}) + (۵/۰\,\text{kg})(۳\,\text{m/s}) = (۲/۰\,\text{kg} + ۵/۰\,\text{kg})v$$

$$\Rightarrow v = ۵\,\text{m/s}$$

سپس داریم

$$\frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ + \frac{۱}{۲}m_۱v_۱^۲ = \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v^۲ + \frac{۱}{۲}kx^۲$$

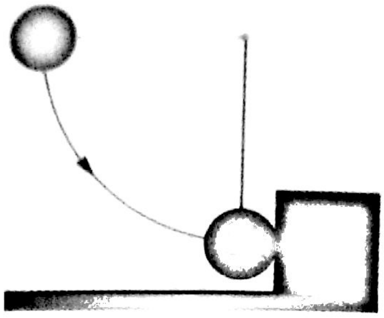
که با قرار دادن $v = ۵\,\text{m/s}$ و داده‌های مسئله بیشینهٔ فشردگی فنر به‌دست می‌آید.

$$x = ۰/۲۵\,\text{m}$$

Scanned by CamScanner

$m_1 + m_2$

۶۴۰۰- یک گلولهٔ فولادی به جرم ۰/۵۰۰kg به انتهای سیمی به طول ۷۰/۰cm در انتها ثابت شده بسته شده است. وقتی که سیم در وضعیت افقی است (شکل ۹-۶۵) گلوله رها می‌شود و در پایین‌ترین نقطهٔ مسیرش به یک قطعهٔ فولادی به جرم ۲/۵۰kg که در حال سکون روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد، برخورد می‌کند. برخورد کشسان است. مطلوب است (الف) تندی گلوله و (ب) تندی قطعه درست پس از برخورد.



شکل ۹-۶۵ مسئلهٔ ۶۴

حل: حرکت از دو قسمت تشکیل شده است. یکی پس از رها شدن گلوله تا پیش از برخورد با قطعه و قسمت دوم یک برخورد کشسان یک بعدی است. برای قسمت اول از پایستگی انرژی استفاده کرده سرعت گلوله را پیش از برخورد به‌دست می‌آوریم.

$$E_i = E_f \Rightarrow ۰ + m_۱ gL = \frac{۱}{۲} m_۱ v_۱^۲ + ۰$$

$$v_۱ = \sqrt{۲gL} = \sqrt{۲(۹/۸\text{m/s}^۲)(۰/۷\text{m})} = ۳/۷\text{m/s}$$

برای قسمت دوم $v_{۱i} = v_۱ = ۳/۷\text{m/s}$ و برای برخورد کشسان یک بعدی $(v_{۲i} = ۰)$ داریم

(الف)

$$v_{۱f} = \frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{(۰/۵\text{kg}) - (۲/۵\text{kg})}{(۰/۵\text{kg}) + (۲/۵\text{kg})}(۳/۷\text{m/s})$$
$$= -۲/۴۷\text{m/s}$$

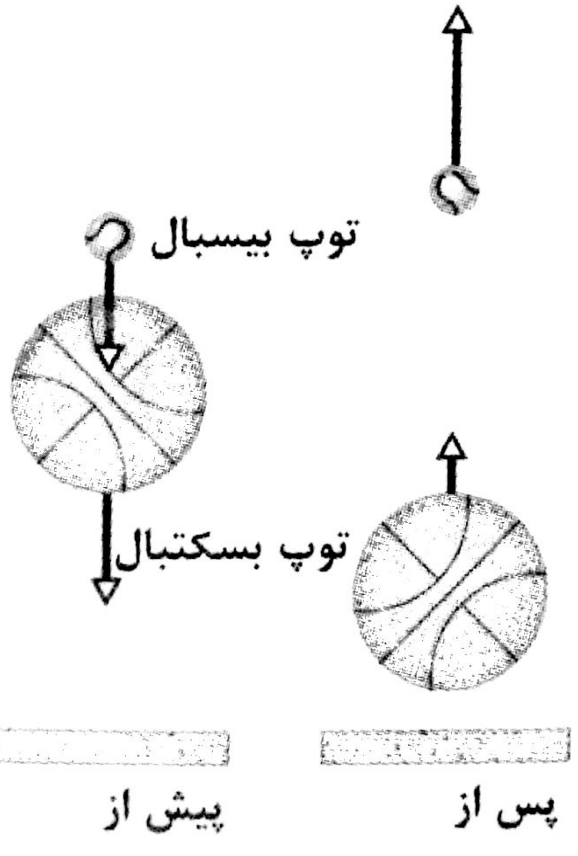
علامت منفی بیانگر حرکت رو به عقب گلوله پس از برخورد است.

(ب)

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۲(۰/۵\text{kg})}{(۰/۵\text{kg}) + (۲/۵\text{kg})}(۳/۷\text{m/s})$$
$$= ۱/۲۳\text{m/s}$$

Scanned by CamScanner

●●●۶۹- GO [redacted] توپ کوچکی به جرم m همردیف و بالای توپ بزرگ‌تر به جرم $M = ۰/۶۳\text{kg}$ قرار دارد (با جدایی اندک، مانند توپ بیسبال و توپ بسکتبال شکل ۹-۶۸ الف) و از ارتفاع $h = ۱/۸\text{m}$ با فرض اینکه شعاع هر توپ نسبت به h ناچیز است به‌طور همزمان رها می‌شوند. (الف) اگر توپ بزرگ‌تر به‌طور کشسان از کف به سمت بالا و سپس توپ کوچک پس از برخورد کشسان با توپ بزرگ‌تر به سمت بالا برگردد، چه مقدار m باعث می‌شود تا وقتی که توپ بزرگ با توپ کوچک برخورد کرد متوقف شود؟ (ب) در این موقع توپ کوچک به چه ارتفاعی می‌رسد (شکل ۹-۶۸ ب).



شکل ۹-۶۸ مسئلهٔ ۶۹

حل: ابتدا با استفاده از اصل پایستگی انرژی سرعت تـوپ‌هـا را در مجاورت زمین به‌دست آوریم

$$E_i = E_f$$

$$mgh = \frac{۱}{۲}mv^{۲} \Rightarrow v = \sqrt{۲gh} \begin{cases} v_{Mi} = \sqrt{۲gh} \\ v_{mi} = -\sqrt{۲gh} \end{cases}$$

(الف) برای برخورد کشسان یک بعدی داریم

$$v_{Mf} = \frac{M-m}{M+m}v_{Mi} + \frac{۲m}{M+m}v_{mi}$$
$$= \frac{M-m}{M+m}\sqrt{۲gh} - \frac{۲m}{M+m}\sqrt{۲gh} = \frac{M-۳m}{M+m}\sqrt{۲gh}$$

چون می‌خواهیم پس از بخورد سرعت توپ بزرگتر صفر باشد، لذا خواهیم داشت

$$v_{Mf} = ۰ \Rightarrow M = ۳m \Rightarrow m = \frac{۰/۶۳}{۳} = ۰/۲۱\text{kg}$$

(ب) سرعت توپ کوچک‌تر نیز پس از برخـورد از رابطـهٔ زیـر به‌دست می‌آید. $(M = ۳m)$

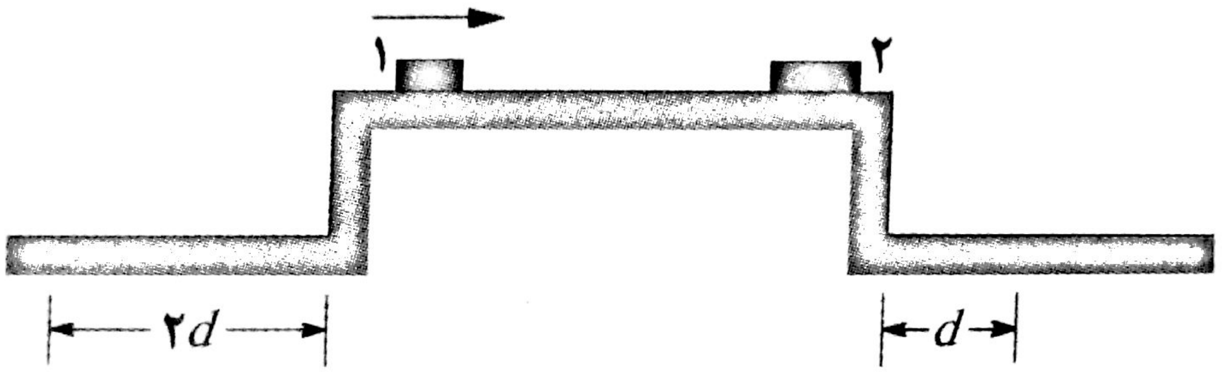
$$v_{mf} = \frac{۲M}{M+m}v_{Mi} + \frac{m-M}{M+m}v_{mi}$$
$$= \frac{۲(۳m)}{۳m+m}\sqrt{۲gh} - \frac{m-۳m}{۳m+m}\sqrt{۲gh} = ۲\sqrt{۲gh}$$
$$= ۲\sqrt{۲(۹/۸\,\text{m/s}^{۲})(۱/۸\,\text{m})} = ۱۱/۹\,\text{m/s}$$

از پایستگی انرژی داریم

$$\frac{۱}{۲}mv_{mf}^{۲} = mgh' \Rightarrow h' = \frac{v_{mf}^{۲}}{۲g} = \frac{(۱۱/۹\,\text{m/s})^{۲}}{۲(۹/۸\,\text{m/s})^{۲}} = ۷/۲\text{m}$$

Scanned by CamScanner

●●●۷۰- 🅞 در شکل ۹-۶۹ قرص ۱ به جرم $m_1 = 0/20\,\text{kg}$ روی میز بدون اصطکاک آزمایشگاه سر داده می‌شود تا با قرص ساکن ۲ برخورد کشسان یک بعدی کند. سپس قرص ۲ سُر خورده و از میز می‌افتد و در فاصلهٔ d از پایهٔ میز فرود می‌آید. قرص ۱ بر اثر برخورد به عقب برمی‌گردد و در جهت مخالف روی میز سُر می‌خورد و از روی میز پرتاب شده و در فاصلهٔ $2d$ از پایهٔ میز فرود می‌آید. جرم قرص ۲ چقدر است؟ (راهنمایی: به علامت‌ها دقت کنید.)



شکل ۹-۶۹ مسئلهٔ ۷۰

حل: چون برخورد کشسان یک بعدی است و $v_{2i} = 0$ است. لذا از معادله‌های ۹-۶۷ و ۹-۶۸ داریم

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = v_{1i} \qquad \text{و} \qquad v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$$

هر دو قرص در زمان سقوط یکسانی به کف می‌رسند چون ارتفاع سقوط هر دو یکی است، لذا برای قرص ۱ در خلاف جهت محور x داریم

Scanned by CamScanner

$$-۲d = v_{۱f}t = \frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲} v_{۱i}t$$

برای قرص ۲ در جهت محور x می‌نویسیم

$$d = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i}t$$

از تقسیم کردن دو رابطه بر هم خواهیم داشت

$$\frac{-۲d}{d} = \frac{\frac{m_۱ - m_۲}{m_۱ + m_۲} v_{۱i}\, t}{\frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i}\, t} \Rightarrow -۲ = \frac{m_۱ - m_۲}{۲m_۱}$$

$$-۲ = \frac{(۰/۲۰\,\text{kg}) - m_۲}{۲\,(۰/۲۰\,\text{kg})} \Rightarrow m_۲ = ۱/۰\,\text{kg}$$

Scanned by CamScanner

●●۷۴- دو جسم A و B هر یک به جرم ۲/۰ kg، برخورد می‌کنند. سرعت‌های قبل از برخورد عبارت‌اند از $\vec{v}_A = (۱۵\hat{i} + ۳۰\hat{j})$ m/s و $\vec{v}_B = (-۱۰\hat{i} + ۵/۰\hat{j})$ m/s. پس از برخورد $\vec{v}_A' = (-۵/۰\hat{i} + ۲۰\hat{j})$ m/s. (الف) سرعت نهایی B و (ب) تغییر در انرژی جنبشی (شامل علامت)، چقدر است؟

حل: (الف) از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B$$

با توجه به اینکه جرم‌ها برابرند از طرفین رابطه حذف می‌شوند. در نتیجه می‌توان نوشت

$$\vec{v}'_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B - \vec{v}'_A$$
$$= (۱۵\hat{i} + ۳۰\hat{j}) + (-۱۰\hat{i} + ۵\hat{j}) - (-۵\hat{i} + ۲۰\hat{j})$$
$$= (۱۰\hat{i} + ۱۵\hat{j})\ \mathrm{m/s}$$

(ب) انرژی جنبشی اولیهٔ دستگاه برابر است با

$$K_i = \frac{۱}{۲}m_A v_A^۲ + \frac{۱}{۲}m_B v_B^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۰\ \mathrm{kg})[(۱۵)^۲ + (۳۰)^۲]$$
$$+\frac{۱}{۲}(۲/۰\ \mathrm{kg})[(-۱۰)^۲ + (۵)^۲] = ۱/۳ \times ۱۰^۳\ \mathrm{J}$$

انرژی جنبشی نهایی دستگاه برابر است با

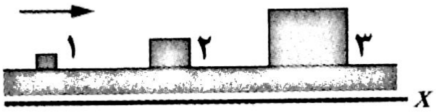
$$K_f = \frac{۱}{۲}m_A v_A'^۲ + \frac{۱}{۲}m_B v_B'^۲ = \frac{۱}{۲}(۲/۰\ \mathrm{kg})[(-۵)^۲ + (۲۰)^۲]$$
$$+\frac{۱}{۲}(۲/۰\ \mathrm{kg})[(۱۰)^۲ + (۱۵)^۲] = ۸/۰ \times ۱۰^۲\ \mathrm{J}$$

تغییر انرژی جنبشی دستگاه برابر است با $\Delta K = -۵/۰ \times ۱۰^۲\ \mathrm{J}$

که علامت منفی بیانگر از دست رفتن انرژی جنبشی اولیه است.

Scanned by CamScanner

۸۵- [redacted] **تضعیف کنندهٔ تندی.** در شکل ۹-۷۴، قطعهٔ ۱ به جرم $m_۱$ با تندی $۰/۴۰۰\,\text{m/s}$ در امتداد محور x روی سطح بدون اصطکاکی می‌لغزد. سپس، با قطعهٔ ۲ به جرم $m_۲ = ۲/۰۰ m_۱$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، قطعهٔ ۲ با قطعهٔ ۳ به جرم $m_۳ = ۲/۰۰ m_۲$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. (الف) تندی قطعهٔ ۳ چقدر است؟ آیا، (ب) تندی، (پ) انرژی جنبشی و (ت) اندازه حرکت قطعهٔ ۳، بزرگ‌تر است یا کوچک‌تر یا با مقدارهای اولیهٔ ۱ یکسان است؟



شکل ۹-۷۴ مسئلهٔ ۸۵

حل: (الف) برخوردها یک بعدی و کشسان هستند و چون هدف (ابتدا قطعهٔ (۲) و سپس قطعهٔ (۳)) در هر دو برخورد ساکن است لذا می‌توان نوشت

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۲m_۱}{۳m_۱}(۴/۰۰\,\text{m/s}) = ۲/۶۷\,\text{m/s}$$

سپس $v_{۲f}$ خود سرعت اولیهٔ قطعهٔ ۲ $(v_{۲i} = v_{۲f})$ در برخورد با قطعهٔ ۳ است و با توجه به ساکن بودن این قطعه خواهیم داشت

$$v_{۳f} = \frac{۲m_۲}{m_۳ + m_۲} v_{۲i} = \frac{۲m_۲}{۳m_۲}(۲/۶۷\,\text{m/s}) = ۱/۷۸\,\text{m/s}$$

(ب) از مقایسه مشاهده می‌کنیم که $v_{۳f}$ کوچکتر از $v_{۱i}$ است یعنی سرعت تضعیف شده است.

(پ) $$K_۱ = \frac{۱}{۲} m_۱ v_{۱i}^۲ = \frac{۱}{۲} m_۱ (۴/۰۰\,\text{m/s})^۲ = ۸ m_۱$$

$$K_۳ = \frac{۱}{۲} m_۳ v_{۳i}^۲ = \frac{۱}{۲}(۴ m_۱)(۱/۷۸\,\text{m/s})^۲ = ۶/۳۴ m_۱$$

درمی‌یابیم که انرژی جنبشی کاهش یافته است.

(ت) $$P_۱ = m_۱ v_{۱i} = ۴ m_۱$$

$$P_۳ = m_۳ v_{۳f} = ۴ m_۱ (۱/۷۸\,\text{m/s}) = ۷/۲۱ m_۱$$

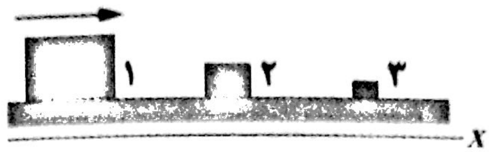
از مقایسه مشاهده می‌شود که اندازه حرکت افزایش یافته است.

Scanned by CamScanner

۸۶- [redacted] **تقویت کنندهٔ تندی.** در شکل ۹-۷۵، قطعهٔ ۱ به جرم $m_۱$ با تندی $v_{۱i} = ۴/۰۰ \mathrm{m/s}$ روی سطح بدون اصطکاکی در امتداد محور x سر می‌خورد. سپس با قطعهٔ ۲ به جرم $m_۲ = ۰/۵۰۰ m_۱$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. پس از آن، قطعهٔ ۲ با قطعهٔ ۳ به جرم $m_۳ = ۰/۵۰۰ m_۲$ که ساکن است برخورد کشسان یک بعدی می‌کند. (الف) تندی

Scanned by CamScanner

قطعه ۳ چقدر است؟ آیا (پ) تندی، (ت) انرژی جنبشی و (ث) اندازه حرکت قطعهٔ ۳ بزرگ‌تر از کم‌تر از یا یکسان با این مقدارها برای قطعهٔ ۱ است؟



شکل ۹-۷۵ مسئلهٔ ۸۶

حل: (الف) برخورد قطعهٔ (۱) به قطعهٔ (۲) برخورد کشسان یک بعدی است. ابتدا این برخورد را بررسی می‌کنیم. در این برخورد $v_{۲i} = ۰$ و از معادلهٔ ۹-۷۶ یا معادلهٔ ۹-۶۸ داریم

$$v_{۲f} = \frac{۲m_۱}{m_۱ + m_۲} v_{۱i} = \frac{۲m_۱}{۱/۵m_۱}(۴/۰۰\,\text{m/s}) = ۵/۳۳\,\text{m/s}$$

سپس $v_{۲f}$ خود سرعت اولیهٔ $(v_{۲i} = v_{۲f})$ قطعهٔ (۲) در برخورد کشسان یک بعدی با قطعهٔ (۳) است و به ازای $v_{۳i} = ۰$، خواهیم داشت

$$v_{۳f} = \frac{۲m_۲}{m_۲ + m_۳} v_{۲i} = \frac{۲m_۲}{۱/۵m_۲}(۵/۳۳\,\text{m/s}) = ۷/۱۱\,\text{m/s}$$

(ب)

$$\frac{v_{۳f}}{v_{۱i}} = \frac{۷/۱۱}{۴/۰۰} = ۱/۷۸$$

مشاهده می‌شود که سرعت تقویت شده است.

(پ)

$$K_{۱i} = \frac{۱}{۲} m_۱ v_{۱i}^۲ = \frac{۱}{۲} m_۱ (۴/۰۰)^۲ = ۸\,m_۱$$

$$K_{۳f} = \frac{۱}{۲} m_۳ v_{۳f}^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۴} m_۱\right)(۷/۱۱)^۲ = ۶/۳۲\,m_۱$$

مشاهده می‌شود که $K_{۳f}$ کوچک‌تر از $K_{۱i}$ است و این نتیجه دور از انتظار نیست چون انرژی جنبشی اولیه بین سه قطعه تقسیم شده است.

(ت)

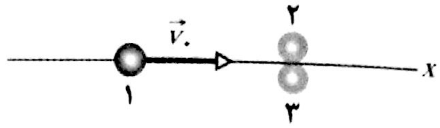
$$P_{۱i} = m_۱ v_{۱i} = ۴m_۱$$

$$P_{۳f} = m_۳ v_{۳f} = \frac{۱}{۴} m_۱ (۷/۱۱) = ۱/۷۸\,m_۱$$

مشاهده می‌شود که اندازه حرکت نیز به دلیل ذکر شده کاهش یافته است.

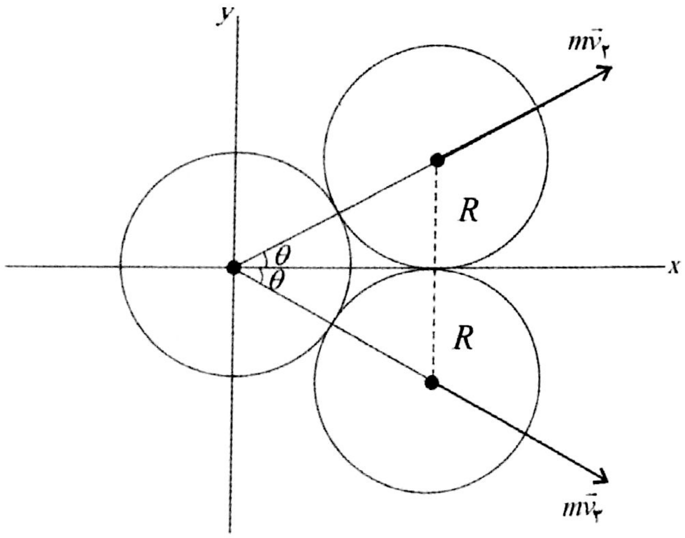
Scanned by CamScanner

۹۷. سه توپ در دید از بالای شکل ۹-۷۶ مشابه‌اند. توپ ۲ و ۳ با یکدیگر در تماس‌اند و عمود بر مسیر توپ ۱ قرار دارند. سرعت توپ ۱ دارای بزرگی $v_0 = 10\ m/s$ و به سمت نقطهٔ تماس توپ‌های ۱ و ۲ است. پس از برخورد، مطلوب است تعیین، (الف) تندی و (ب) جهت سرعت توپ ۲، (پ) تندی و (ت) جهت سرعت توپ ۳، (ث) تندی و (ج) جهت توپ ۱. (راهنمایی: با توجه به نبود اصطکاک، جهت هر ضربه در راستای خطی است که مرکز توپ‌های برخورد کننده را به هم متصل می‌کند و عمود بر سطح‌های برخورد کننده است.)



شکل ۹-۷۶ مسئلهٔ ۹۷

حل: با توجه به اینکه سه توپ یکسان‌اند و راهنمایی مسئله توپ ۱ مطابق شکل با دو توپ دیگر برخورد کرده و ضربه وارده به آنها یکسان و در جهت‌های یکسان ولی متقابل است.



از پایستگی اندازه حرکت خطی در راستای محورهای x و y و در نظر گرفتن $\theta_1 = \theta_2 = 30°$ داریم

$$mv_0 = mv_1 + mv_2 \cos 30° + mv_3 \cos 30°$$

$$0 = 0 + mv_2 \sin 30° - mv_3 \sin 30$$

$$v_0 = v_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} v_3 \qquad (1)$$

$$0 = 0 + v_2 - v_3 \Rightarrow v_2 = v_3 = v \qquad (2)$$

با توجه به رابطه (۲)، رابطه (۱) به صورت زیر در می‌آید

$$v_0 = v_1 + \sqrt{3}\, v \Rightarrow 10 = v_1 + \sqrt{3}\, v \Rightarrow v_1 = 10 - \sqrt{3}\, v \qquad (3)$$

Scanned by CamScanner

از پایستگی انرژی جنبشی می‌توان دومین معادله را نوشت

$$\frac{۱}{۲}mv_{۰}^{۲} = \frac{۱}{۲}mv_{۱}^{۲} + \frac{۱}{۲}mv_{۲}^{۲} + \frac{۱}{۲}mv_{۳}^{۲}$$

که خواهیم داشت

$$v_{۰}^{۲} = v_{۱}^{۲} + ۲v^{۲} \qquad (۴)$$

(الف) با جاگذاری $v_{۱}$ از رابطه (۳) در رابطهٔ (۴) و حل آن برای v خواهیم داشت

$$v = v_{۲} = ۶/۹\,\text{m/s}$$

(ب) در امتداد °۳۰ بالای محور x.

(پ) $v_{۳} = v_{۲} = ۶/۹\,\text{m/s}$

(ت) در امتداد °۳۰ زیر محور x.

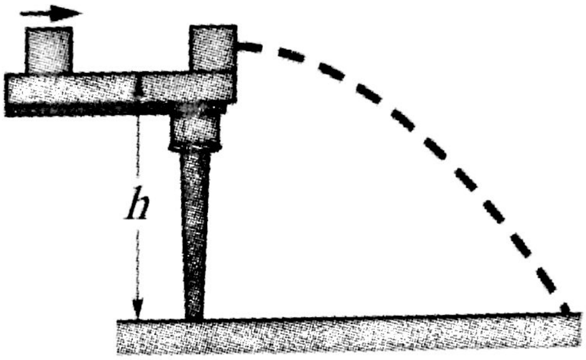
(ث) با قرار دادن $v = ۶/۹\,\text{m/s}$ در رابطه (۳) خواهیم داشت

$$v_{۱} = -۲/۰\,\text{m/s}$$

(ج) در خلاف جهت محور x.

Scanned by CamScanner

۱۰۱- در شکل ۹–۷۸ ، یک جعبهٔ کفش به جرم ۳/۲kg روی سطح افقی بدون اصطکاکی سُر می‌خورد و با جعبه کفش دیگری به جرم ۲/۰kg که در آغاز روی لبهٔ میز در ارتفاع $h = ۰/۴۰\,\mathrm{m}$ ساکن است برخورد می‌کند. تندی جعبه ۳/۲kg درست پیش از برخورد ۳/۰m/s است. اگر دو جعبه به خاطر چسبی که روی سطح آنها وجود دارد به هم بچسبند، انرژی جنبشی آنها درست پیش از برخورد به کف اتاق چقدر است؟



شکل ۹–۷۸ مسئلهٔ ۱۰۱

حل: مسئله از دو قسمت تشکیل شده ابتدا یک برخورد کاملاً ناکشسان است و پس آن یک حرکت پرتابی که در اولی از پایستگی اندازه حرکت و در قسمت دوم از پایستگی انرژی می‌توان استفاده کرد.

$$m_۱ v_۱ + ۰ = (m_۱ + m_۲)v \Rightarrow$$

$$v = \frac{m_۱ v_۱}{m_۱ + m_۲} = \frac{(۳/۲\,\mathrm{kg})(۳/۰\,\mathrm{m/s})}{(۳/۲\,\mathrm{kg}) + (۲/۰\,\mathrm{kg})} = ۱/۸۴\,\mathrm{m/s}$$

Scanned by CamScanner

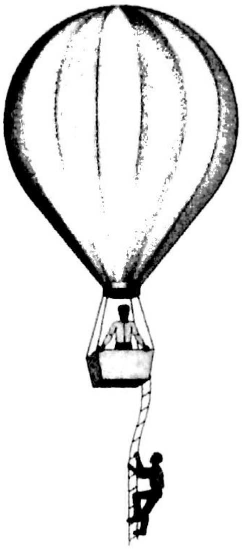
$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$(m_۱ + m_۲)gh + \frac{۱}{۲}(m_۱ + m_۲)v^۲ = ۰ + K_f$$

$$K_f = (۳/۲ + ۲)(۹/۸)(۰/۴) + \frac{۱}{۲}(۳/۲ + ۲)(۱/۸۴)^۲ = ۲۹\text{J}$$

Scanned by CamScanner

۱۰۲- در شکل ۹-۷۹ مردی با جرم ۸۰kg روی نردبانی که از بالونی با جرم کل ۳۲۰kg (شامل سبد مسافر) آویزان است، قرار دارد. بالن در آغاز نسبت به زمین ساکن است. اگر مرد روی نردبان با تندی ۲/۵m/s نسبت به نردبان شروع به بالا رفتن کند، بالون (الف) با چه تندی و (ب) در چه جهتی حرکت می‌کند. (پ) سپس، اگر مرد بالا رفتن را متوقف کند تندی بالون چقدر است؟



شکل ۹-۷۹ مسئلهٔ ۱۰۲

حل: (الف) و **(ب)** چون نیروی خالص وارد بر دستگاه مرد-بالون صفر است لذا پایستگی اندازه حرکت خطی برقرار است. مرکز جرم دستگاه باید ساکن بماند و وقتی مرد به سمت بالا حرکت می‌کند، بالون به سمت پایین حرکت خواهد کرد.

چون در ابتدا دستگاه ساکن است پس $P_i = ۰$. مرد را با زیرنویس ۱ و بالون را با زیرنویس ۳ مشخص کنیم به این ترتیب داریم

$$۰ = P_f$$

$$۰ = m_۱ v_{۱f} + m_۲ v_{۲f}$$

که $v_{۱f}$ و $v_{۲f}$ سرعت مرد و بالون نسبت به زمین است که سرعت مرد در واقع برابر است با $v_{۱f} = v_{۲f} + u$ ، که u سرعت مرد نسبت به بالون است.

$$۰ = m_۱(v_{۲f} + u) + m_۲ v_{۲f}$$

$$v_{۲f} = \frac{-m_۱ u}{m_۱ + m_۲} = \frac{-(۸۰)(۲/۵)}{۸۰+۳۲۰} = -۰/۵\,\text{m/s}$$

که علامت منفی به معنی حرکت بالون به سمت پایین است که قبلاً بحث شد.

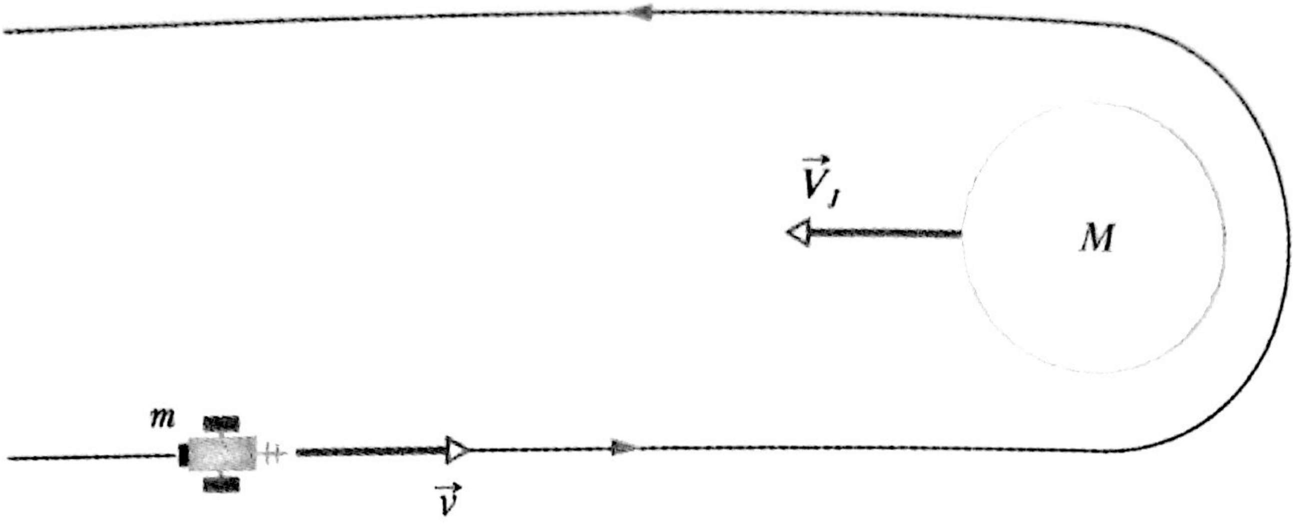
(پ) وقتی مرد از حرکت بایستد، $u = ۰$ است در نتیجه تندی بالون صفر است.

Scanned by CamScanner

۱۲۳- همان‌طور که در شکل ۹-۸۴ نشان داده شده است، کاوشگر فضایی بدون سرنشین (با جرم M و تندی v نسبت به خورشید) نزدیک می‌شود. کاوشگر سیاره را دور می‌زند و در جهت مخالف دور می‌شود. پس از این مواجهه که می‌توان آن را

Scanned by CamScanner

به‌عنوان برخورد تحلیل کرد، تندی آن (برحسب کیلومتر بر ثانیه) نسبت به خورشید چقدر است؟



شکل ۹-۸۴ مسئله ۱۲۳

حل: از پایستگی اندازه حرکت خطی داریم

$$mv + MV_J = mv_f + MV_{Jf} \qquad (۱)$$

به‌طور مشابه، انرژی جنبشی کل پایسته است. یعنی

$$\frac{۱}{۲}mv^۲ + \frac{۱}{۲}MV_J^۲ = \frac{۱}{۲}mv_f^۲ + \frac{۱}{۲}MV_{Jf}^۲ \qquad (۲)$$

از دستگاه دو معادله‌ای (۱) و (۲) داریم

$$v_f = \frac{m-M}{m+M}v + \frac{۲M}{m+M}V_J,\ V_{Jf} = \frac{۲m}{m+M}v + \frac{M-m}{m+M}V_J$$

چون $m \ll M$ است، می‌توان نوشت

$$v_f \approx -v + ۲V_J,\ V_{Jf} \approx V_J$$

سرعت کاوشگر نسبت به خورشید برابر است

$$v_f \approx -v + ۲V_J = -(۱۰/۵\,\text{km/s}) + ۲(-۱۳/۰\,\text{km/s})$$

$$= -۳۶/۵\,\text{km/s}$$

به این ترتیب تندی برابر است با $|v_f| = ۳۶/۵\ \text{km/s}$.

Scanned by CamScanner